Lycée M^{ed} Reda Slaoui
Centre Des Classes Préparatoires
Agadir

Année Scolaire : 04/05
BCPST 1

Devoir surveillé n°6

29/04/2005

Durée 2heures

Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre qu'il vous plaira.

Exercice 1.

Soit dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le point $H(a, b, c)$ (on suppose $abc \neq 0$)

1. Donner une équation cartésienne du plan (P) mené par H perpendiculairement à la droite (OH). En déduire les coordonnées des points A, B et C où ce plan coupe les axes $(Ox), (Oy)$ et (Oz) et montrer que l'on a :

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OH^2}$$

2. Calculer les trois produits scalaires $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}$. En déduire ce que représente le point H pour le triangle ABC.

Exercice 2.

On donne dans le plan (P),un triangle rectangle ABC d'hypoténuse $[BC]$ de longueur $2a$. On considère l'application f qui à tout point M de (P) associe le vecteur $\overrightarrow{f(M)}$ défini par :

$$\overrightarrow{f(M)} = 4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + m\overrightarrow{MC}$$

où m est un paramètre réel.

1. Déterminer m pour que $\overrightarrow{f(M)}$ soit un vecteur constant $\vec{V_0}$, et calculer $\vec{V_0}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. On prend $m = -1$. Démontrer que le barycentre G de la famille $(A, 4), (B, -1)$ et $(C, -1)$ est le symétrique par rapport à A du milieu I de $[BC]$.
3. Déterminer l'ensemble (C) des points M de (P) tels que

$$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -4a^2$$

Exercice 3.

Dans un plan, on consière trois points A, B et C formant un triangle rectangle en B, isocèle, tel que $AB = a$.

Déterminer et représenter l'ensemble (E) des points M du plan tels que

$$2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 3a^2$$

Exercice 4.

A, B, C sont trois points non alignés de l'espace ; D est un point situé à l'intérieur du triangle ABC (cotés exclus).

On désigne respectivement par E, F et G les points d'intersection des droites (AD) et (BC), (BD) et (AC), (CD) et (BA).

L'objet de l'exercice est de déterminer la position du point D pour laquelle l'aire du triangle EFG est maximale.

On désigne par S l'aire du triangle ABC et S' l'aire du triangle EFG. Soient x, y et z des réels strictement positifs tels que D soit le barycentre des points pondérés $(A, x); (B, y)$ et (C, z).

1. Démontrer que E, F et G sont les barycentres respectifs des systèmes de points pondérés $\{(B, y); (C, z)\}, \{(C, z), (A, x)\}$ et $\{(A, x); (B, y)\}$.
2. En déduire que
$$\overrightarrow{GE} = \frac{z}{y+z}\overrightarrow{BC} - \frac{x}{x+y}\overrightarrow{BA}$$
et
$$\overrightarrow{GF} = \frac{z}{x+z}\overrightarrow{BC} + \frac{(y-z)x}{(x+z)(x+y)}\overrightarrow{BA}$$
3. Démontrer que $S' = \lambda S$ avec : $\lambda = \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$
4. On note f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(t) = \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}$.
   (a) Démontrer que $\lambda = \frac{2}{f(\frac{y}{x})f(\frac{z}{y})f(\frac{x}{z})}$.
   (b) En étudiant les variations de f, résoudre le problème posé.

Exercice 5.

Dans Dans l'espace vectoriel orienté $\overrightarrow{E}$, de dimension 3 rapporté à une base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on définit une application f par :

$$(\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}), \quad f(u) = \overrightarrow{p} \wedge (\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u})$$

où $\overrightarrow{p}$ est un vecteur unitaire de composante (a, b, c).

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\overrightarrow{E}$. Déterminer la matrice A de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. En déduire les coordonnées (x', y', z') de $f(u)$ en fonction des coordonnées (x, y, z) de $\overrightarrow{u}$.
2. Déterminer le noyau de f. L'application f est-elle injective ?

Indication :
On pourra utiliser le résultat suivant : $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$

•••••••••••